Лекция 4
Отношение предпочтения, функция полезности

1. Потребительские наборы и их сравнение

Теория потребительского поведения базируется на ряде идеализированных исходных предположений.

Первое из них заключается в том, что предполагается существование некоторого множества $\boldsymbol{X}$ потребительских наборов – наборов предметов потребления, продуктов или услуг (все эти понятия в теории потребления объединяют общим термином "блага"). Каждый набор охватывает все потребности потребителя в каком-то секторе жизнедеятельности, к примеру, это может быть набор продуктов питания. Под потребителем в общем случае понимается не обязательно отдельный человек – это может быть, например, семья, или определенная категория людей. Набор состоит из $\boldsymbol{n}$ элементов $\boldsymbol{x_i}$, каждый из которых выражает количество потребляемого блага $\boldsymbol{i}$-вида, входящего в состав набора. Очевидно, каждый элемент набора должен быть неотрицателен: $x_i \geq 0$.

Потребитель может выбрать любой из потребительских наборов, однако в его глазах они не равноценны. Второе исходное предположение заключается в том, что между различными наборами существуют **бинарные отношения слабого предпочтения**. Отношение слабого предпочтения между наборами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ обозначается

$$x \Rightarrow\!\succ y \text{ } (x \text{ равноценен или предпочтительнее } y). \qquad (3.28)$$

Это значит, что при равных условиях потребитель может либо предпочесть набор $\boldsymbol{x}$ набору $\boldsymbol{y}$, либо не увидит между ними разницы.

Если одновременно существуют отношения $x \Rightarrow\!\succ y$ и $y \Rightarrow\!\succ x$, то говорят, что между наборами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеет место отношение безразличия (равноценности). Такие два набора с точки зрения потребителя абсолютно одинаковы. Отношение безразличия обозначают $\boldsymbol{x \sim y}$.

Если же $x =\succ y$, а отношение $y =\succ x$ не имеет места, то говорят о **сильном предпочтении *x*** по отношению к ***y***: $x \succ y$.

Отношение слабого предпочтения удовлетворяет ряду аксиом:

1. Оно является совершенным. Это значит, что для любых двух наборов ***x*** и ***y*** из множества ***X*** обязательно существует какое-то из трех соотношений:

$$x =\succ y \qquad\qquad y =\succ x \qquad\qquad x \sim y,$$

т.е., не существует таких наборов, которые нельзя было бы сравнить с другими.

2. Оно является транзитивным, т.е. из того, что $x =\succ y$ и $y =\succ z$ следует, что $x =\succ z$.

3. Оно является рефлексивным – для любого набора из множества ***X*** справедливо соотношение $x =\succ x$.

Отсюда следует, что множество наборов ***X*** распадается на попарно непересекающиеся подмножества, внутри которых составляющие их наборы связаны отношением безразличия (при этом некоторые из подмножеств безразличия могут состоять всего из одного набора). Подмножество безразличия, состоящее из наборов, равноценных некоторому набору ***x***, обозначается $\boldsymbol{C_x}$.

Сравнительную ценность разных наборов в глазах потребителя можно описать **функцией полезности** (ФП) потребительских наборов. Это некая функция ***u*(*x*)**, обладающая следующим свойством:

$$x \succ y \qquad \text{тогда и только тогда, когда} \qquad u(x) > u(y). \qquad (3.29)$$

Легко видеть, что любое монотонное преобразование функции ***u*(*x*)**, например, $ln\ u$, e^u, $au+b$ (где ***a***,***b*** – постоянные, причем, $a > 0$), также дает функцию, обладающую свойством (3.29), т.е., новую функцию полезности. Поэтому функция полезности не служит количественной мерой какого-то свойства "полезности". Она только позволяет определить порядок сортировки наборов по критерию увеличения потребительских предпочтений, поэтому иногда называется функцией **порядковой полезности**.

Можно заметить, что каждому подмножеству безразличия $\boldsymbol{C_x}$ соответствует какое-то постоянное значение функции полезности.

В теории потребления предполагается, что функция полезности обладает свойствами:

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} > 0$ – увеличение потребления какого-то блага в наборе при неизменном потреблении остальных благ должно увеличивать полезность набора.

2. $\lim\limits_{x_i \to 0} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$ – если какое-то благо вообще отсутствовало в наборе, то появление даже малого его количества в наборе резко увеличивает полезность.

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^{\,2}} < 0$ – с увеличением потребления блага в наборе скорость роста полезности уменьшается. В конце концов, наступает насыщение и дальнейшее увеличение потребления данного блага, уже не увеличивает полезность набора. Это приводит к следующему свойству функции полезности:

4. $\lim\limits_{x_i \to \infty} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$

Рассмотрим набор из двух благ, количества которых обозначим соответственно $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$. Тогда функция полезности – это функция двух переменных $\boldsymbol{u(x_1,x_2)}$. Какое-либо подмножество безразличия в множестве различных наборов определяется условием $u(x_1,x_2) = u_0 = Const$.

Если рассматривать $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$, как координаты на плоскости, то указанное условие определяет на плоскости кривую, называемую **кривой безразличия**. Для разных значений $\boldsymbol{u_0}$ кривые безразличия образуют семейство линий на плоскости – ***изоквант функции полезности***.

Часто рассматривается **неоклассическая функция полезности** (функция Кобба-Дугласа)

$$u = x_1^a x_2^b, \qquad (a + b \le 1). \tag{3.30}$$

Кривые безразличия неоклассической функции полезности представляют собой семейство гипербол (рис. 3.8).

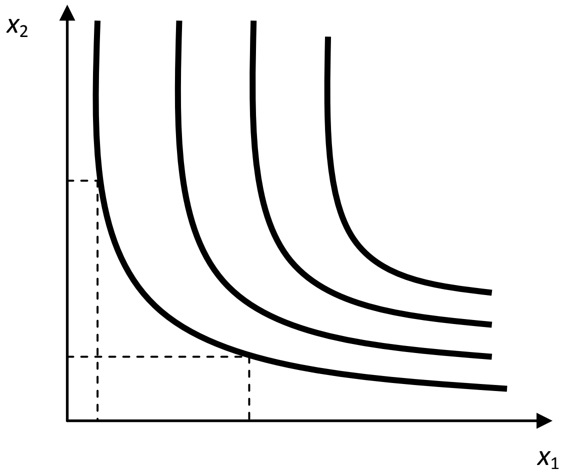

Рис. 3.8. Неоклассические кривые безразличия

Можно видеть, что в этом случае для сохранения неизменного уровня полезности в случае уменьшения потребления одного из благ необходимо увеличивать потребление второго блага. Такое свойство называется **взаимозамещением** благ. Примером взаимозамещающихся благ могут служить, например, чай и кофе, мясо и рыба (если не принимать во внимание какие-то дополнительные – например, медицинские – соображения).

Следует отметить, что существуют и другие виды функции полезности, например:

1. Функция полезности с полным взаимозамещением благ

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 \ \ (a, b = Const).$$

Кривые безразличия такой функции полезности имеют вид наклонных прямых (рис. 3.9).

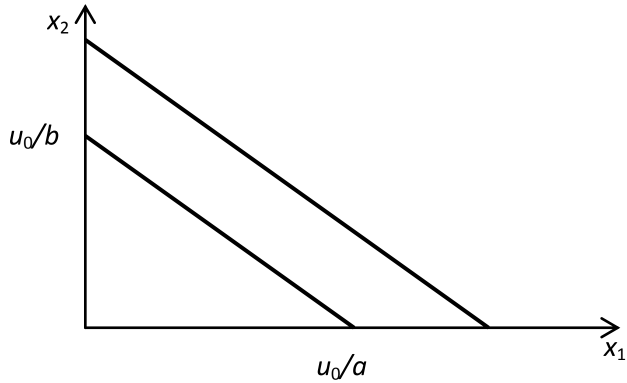

Рис. 3.9. Кривые безразличия функции полезности с полным взаимозамещением благ

2. Функция полезности с полным взаимодополнением благ. В этом случае повышение спроса на 1 товар или услугу автоматически ведет к повышению спроса на другое благо. Примером могут служить бензин и моторное масло. При взаимодополнении благ избыток одного из благ не имеет значения. Определенная полезность набора $\boldsymbol{u_0}$ достигается только при определенном сочетании благ, определяемом значениями $\boldsymbol{x_1}$***** и $\boldsymbol{x_2}$*****.

У такой функции не существует кривых безразличия. Подмножеством безразличия при определенном значении $\boldsymbol{u_0}$ является единственная точка, лежащая на пересечении прямых, определяемых равенствами $x_1 = x_1^*$ и $x_2 = x_2^*$. Все такие точки для разных значений $\boldsymbol{u_0}$ располагаются на прямом луче, выходящем из начала координат под углом $\varphi = arctg\ (x_1^*/\ x_2^*)$ к горизонтальной оси.

3.4.2. Определение оптимального выбора потребителя в случае набора из двух благ

Предельная норма замещения блага $\boldsymbol{x_1}$ благом $\boldsymbol{x_2}$ ("marginal rate of substitution", $MRS_{x_1x_2}$) – это количество блага $\boldsymbol{x_2}$, которое следует добавить в набор для сохранения неизменности уровня удовлетворения потребности при уменьшении количества блага $\boldsymbol{x_1}$ на единицу. Математическое выражение предельной нормы замещения:

$$MRS_{x_1 x_2} = -\frac{dx_2}{dx_1}\bigg|_{u=const}. \tag{3.31}$$

Отсюда видно, что предельная норма замещения графически выражается тангенсом угла наклона касательной к кривой безразличия, взятым с обратным знаком (рис. 3.10). Видно также, что эта величина переменна и зависит от начального количества блага $\boldsymbol{x_1}$. При увеличении количества блага предельная норма его замещения уменьшается.

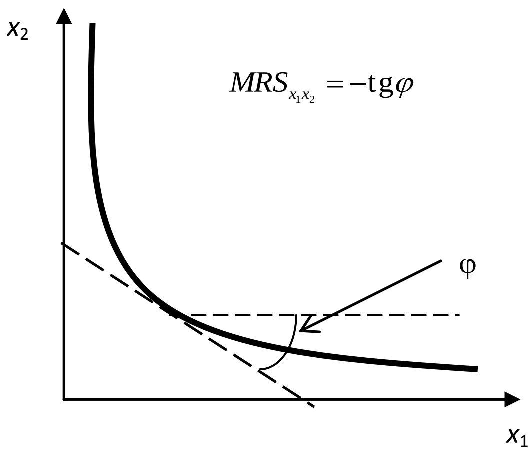

Рис. 3.10. Геометрическое выражение предельной нормы замещения благ

Как легко понять, потребитель стремится приобрести такой набор благ, который обеспечивает максимальный уровень полезности. Иначе говоря, такой набор должен соответствовать наиболее высоко расположенной (или наиболее удаленной от начала координат) кривой безразличия. Однако это стремление потребителя ограничено объемом средств, которыми он располагает для приобретения набора. Если средства, которые потребитель может затратить на приобретение набора, равны $\boldsymbol{I}$, а цены за единичные объемы благ 1 и 2 равны $\boldsymbol{p_1}$ и $\boldsymbol{p_2}$ соответственно, то возможные объемы закупок $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$ должны удовлетворять **бюджетному ограничению** потребителя

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I. \qquad (3.32)$$

Это уравнение определяет на графике кривых безразличия наклонную прямую (рис. 3.11). Для каждой кривой безразличия возможность покупки набора с соответствующим значением функции полезности определяется точками пересечения кривой безразличия и прямой линии бюджетного ограничения. Легко понять, что оптимальный выбор потребителя соответствует самой верхней из кривых безразличия, имеющей хотя бы одну общую точку с прямой ограничения. Он определяется точкой $\boldsymbol{C}$, в которой прямая ограничения оказывается касательной к одной из кривых безразличия – эта кривая как раз и соответствует максимально возможному уровню удовлетворения потребности при ограниченных затратах $\boldsymbol{I}$.

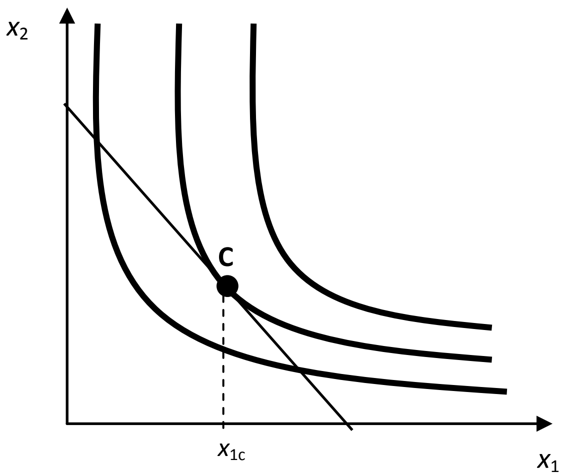

Рис. 3.11. Определение оптимального выбора потребителя

Из (3.32) можно определить зависимость $\boldsymbol{x_2(x_1)}$:

$$x_2 = \frac{I}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1. \tag{3.33}$$

Тогда тот факт, что прямая ограничения является касательной к кривой безразличия в некоторой точке $\boldsymbol{C}$ с горизонтальной координатой $\boldsymbol{x_{1c}}$, означает, что в этой точке совпадают как значения функций $\boldsymbol{x_2(x_1)}$, определяемые уравнениями $u(x_1,x_2) = u_{max}$ и (3.33), так и значения производных этих функций.

С учетом (3.31) и (3.33) имеем систему уравнений

$$\begin{cases} u\left(x_1, \dfrac{I}{p_2} - \dfrac{p_1}{p_2} x_1\right) = u_{\max}, \\ MRS_{x_1,x_2} = -\left.\dfrac{dx_2}{dx_1}\right|_{u=u_{\max}} = \dfrac{p_1}{p_2}. \end{cases} \tag{3.34}$$

Эти уравнения определяют значение количества первого блага $\boldsymbol{x_1}$ в оптимальном наборе и уровень полезности такого набора $\boldsymbol{u_{max}}$. Количество второго блага в оптимальном наборе определяется формулой (3.33).

Пример 3.6. Потребительский набор включает два товара и описывается неоклассической функцией полезности

$$u = x_1^{0,5} x_2^{0,5}.$$

Цены на товары одинаковы и равны каждая 2 единицам, а доход потребителя – 8 единиц.

Определить для этого случая максимальный уровень полезности и состав набора, соответствующего оптимальному выбору потребителя.

Решение

В данном случае функция полезности имеет простой вид (показатели степени при обеих переменных равны). Это позволяет не решать задачу в общем виде (3.34), а получить решение более простым способом.

Бюджетное ограничение потребителя имеет вид (3.32):

$$I = 2x_1+2x_2 = 8.$$

Выразим из этого равенства и из выражения функции полезности переменную $\boldsymbol{x_2}$:

$$x_2 = 4 - x_1, \qquad x_2 = \frac{u^2}{x_1}.$$

Приравняем эти выражения:

$$\frac{u^2}{x_1} = 4 - x_1.$$

Отсюда получается квадратное уравнение

$$x_1^2 - 4x_1 + u^2 = 0.$$

Решение уравнения определяется формулой

$$x_{1_{1,2}} = \frac{4 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4u^2}}{2}.$$

Уравнение может иметь два действительных корня, один действительный корень, или не иметь действительных корней. Если посмотреть на рис. 3.11, то можно понять, что наличие двух корней соответствует случаю, когда прямая бюджетного ограничения пересекает график изокванты функции полезности в двух точках. Отсутствие корней уравнения означает, что прямая бюджетного ограничения и изокванта не имеют общих точек. Наконец, наличие одного корня означает, что эти линии соприкасаются в единственной точке $\boldsymbol{C}$. Эта точка как раз и определяет оптимальный выбор потребителя.

Если квадратное уравнение имеет один корень, то его дискриминант равен нулю:

$$D = 16 - 4u^2 = 0.$$

Отсюда находим максимально достижимое значение функции полезности u_{max} = 2. Объем оптимального спроса на первый товар определяется решением квадратного уравнения при $D = 0$:

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2.$$

Оптимальный спрос на второй товар:

$$x_2 = 4 - x_1 = 2.$$

3.4.3. Определение оптимального выбора потребителя в случае произвольного количества благ

В общем случае рассматривается потребитель с определенным доходом $\boldsymbol{I}$, предназначенным для приобретения набора из $\boldsymbol{n}$ благ, количества которых определяются вектором $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; цены благ определяются соответственно вектором $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$. Ограниченность средств потребителя задает бюджетное ограничение

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le I. \tag{3.35}$$

Если задана функция полезности $\boldsymbol{u(x_1, x_2, ..., x_n)}$, то задача определения оптимального выбора потребителя представляет собой задачу поиска условного максимума функции $\boldsymbol{u(x_1, x_2, ..., x_n)}$ при наличии условия

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_{i,} x_i = I. \tag{3.36}$$

Неравенство (3.35) здесь заменено равенством, исходя из предположения, что для максимизации полезности набора потребитель будет использовать все имеющиеся у него средства.

Из курса высшей математики известно, что подобная задача поиска условного экстремума сводится к нахождению безусловного экстремума функции Лагранжа

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = u(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda' f(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{3.37}$$

Необходимые условия локального экстремума – равенство нулю частных производных функции Лагранжа. С учетом (3.36) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda' p_i = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = I. \end{cases} \tag{3.38}$$

Решение этой системы позволяет определить компоненты вектора $\boldsymbol{x}$ – объемы приобретения благ, соответствующие оптимальному выбору потребителя, а также параметр $\boldsymbol{\lambda'}$, называемый **множителем Лагранжа**.

Множитель Лагранжа в данной задаче определяет (с точностью до знака), насколько возрастет полезность оптимального набора $\boldsymbol{u_{max}}$, если объем средств, выделяемых для приобретения набора, увеличить на единицу:

$$\frac{du_{\max}}{dI} = -\lambda' = \lambda. \tag{3.39}$$

Показатель $\boldsymbol{\lambda}$, противоположный множителю Лагранжа, называется **предельной полезностью денег**.

3.4.4. Математическое описание потребительского спроса. Функции спроса

С решением задач оптимального выбора связан анализ влияния цен на товары и услуги (т.е., блага) и доходов группы потребителей на изменение спроса на те или иные блага. Оптимальный спрос (т.е., спрос на блага, соответствующий оптимальному выбору потребителя) выражается набором функций вида

$$x_i^* = D_i\left(I, p_1, p_2, \ldots, p_{n)}\right), \tag{3.40}$$

называемых функциями спроса (ФС). На рис. 3.11 значение функции спроса $\boldsymbol{D_1}$ определяется горизонтальной координатой точки ***C*** (при соответствующих значениях дохода и цен, определяющих положение кривой безразличия и бюджетной прямой).

Как правило, форма функций спроса определяется путем статистической обработки результатов специальных наблюдений за доходами и расходами представителей различных социальных групп. В зависимости от формы полученной функции спроса выделяют две группы товаров:

а) Если для некоторого товара выполняется условие

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_i} < 0, \tag{3.41}$$

то такой товар называется нормальным, т.к. спрос на него снижается при увеличении цены на товар. Большинство товаров относятся к категории нормальных.

Как правило, для характеристики нормальных товаров используются функции спроса двух видов:

- Линейная функция спроса

$$D_i(p_i) = a - bp_i, \ (a > 0, b > 0 - \text{постоянные параметры}). \tag{3.42}$$

- Степенная функция спроса

$$D_i(p_i) = a \cdot p_i^{-b}, \ (a > 0, b > 0 - \text{постоянные параметры}). \tag{3.43}$$

б) Существуют товары, у которых условие (3.41) не выполняется, т.е.

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_i} > 0.$$

Они называются **аномальными**.

Различают два вида аномальных товаров:

а) **товары Гиффина**.

Эффект Гиффина наблюдался в конце XIX века в Ирландии. В то время картофель считался одним из основных продуктов питания. При этом по мере увеличения дохода потребитель предпочитал покупать меньше картофеля, но больше мяса. Однако с увеличением цены на картофель реальный доход понизился настолько, что потребитель не в состоянии был покупать мясо на прежнем уровне, и вынужден был для восполнения недостатка калорий потреблять больше картофеля. Таким образом, картофель стал заменителем мяса и его потребление, несмотря на повышение цены, все равно увеличилось.

Эффект Гиффина проявился и в современной России. Так, в 1990 году отношение средних рыночных цен на картофель (0,3 р./кг) и мяса (5 р./кг) составило 0,06. В июне 1996 года средние цены стали соответственно 2250 р./кг и 13750 р./кг, а их отношение составило 0,16. Таким образом, относительная цена картофеля (к мясу) выросла в 2,7 раз. В то же время потребление мяса за этот срок сократилось на 20 %, а потребление картофеля возросло на 15 %.

Товары Гиффина являются малоценными товарами, предназначенными для потребителей с низкими доходами.

б) **товары Веблена**.

Товары Веблена – это предметы роскоши, потребляемые богатыми людьми. Обладание таким предметом служит показателем статуса владельца и является престижным в его глазах. Повышение цены увеличивает престиж товара и способствует росту потребления.

Эффект Веблена иногда проявляется и по отношению к товарам широкого потребления. Это происходит, если потребители начинают проявлять недоверие к дешевым товарам какой-то группы (например, лекарствам), считая низкую цену показателем низкого качества. Эффект Веблена иногда используется в рекламных кампаниях (осуществляемых под девизом "скупой платит дважды").

3.4.5. Эластичность спроса

Коэффициент эластичности (КЭ) – это мера реагирования зависимой переменной $\boldsymbol{y(x)}$ на изменение независимой переменной $\boldsymbol{x}$:

$$E_x(y) = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}. \qquad (3.44)$$

Эластичность показывает, на сколько процентов изменяется зависимая переменная, если независимая переменная изменяется на 1%.

Формула (3.44) определяет **точечную эластичность**. Существует еще и **дуговая**, или средняя на каком-то отрезке, эластичность, обычно вычисляемая по формуле Аллена

$$E_x(y)_{1-2} = \frac{x_{cp}}{y_{cp}}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)}}{\frac{x_2 - x_1}{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}. \qquad (3.45)$$

Среднюю эластичность можно использовать на сравнительно небольших отрезках, или если зависимость $\boldsymbol{y(x)}$ является достаточно гладкой.

Для линейной и степенной функций спроса (3.42) и (3.43) коэффициенты эластичности спроса по цене выражаются соответственно формулами

$$E_{p_i\text{лин}}(D_i) = -\frac{bp}{a - bp}, \qquad (3.46)$$

$$E_{p_i\text{степ}}(D_i) = -b. \qquad (3.47)$$

У товаров первой необходимости спрос неэластичен по цене:

$$\left|E_p(D)\right| \to 0.$$

Спрос на такие товары практически постоянен и потребители будут вынуждены приобретать их по любой цене.

У товаров длительного пользования спрос нормально эластичен по цене:

$$\left|E_p(D)\right| \sim 1.$$

У предметов роскоши спрос суперэластичен по цене:

$$\left|E_p(D)\right| > 1.$$

Малое изменение цены может резко изменить спрос на такие товары.

Если цены остаются неизменными, то спрос на товар может меняться также в зависимости от дохода покупателя ***I***.

Если

$$\frac{\partial D_i}{\partial I} > 0$$

– товар **ценный**. Спрос на такой товар выше у потребителей с высокими доходами.

Если выполняется противоположное условие:

$$\frac{\partial D_i}{\partial I} < 0$$

– товар **малоценный**. Такой товар в основном потребляется покупателями с низкими доходами, а по мере роста доходов населения спрос на него падает. Примерами малоценных товаров могут служить изделия китайского ширпотреба.

Сравнительной характеристикой ценности товара является коэффициент эластичности спроса по доходу

$$E_I(D_i) = \frac{I}{D_i}\frac{\partial D_i}{\partial I}. \qquad (3.48)$$

При изучении спроса различных групп потребителей используются в основном модели двух видов:

1. **Степенная модель Энгеля**

$$D_i = a(p)I^{\beta}. \qquad (3.49)$$

Эластичность спроса по доходу для такой модели:

$$E_I(D_i) = \beta. \tag{3.50}$$

При разных значениях показателя $\boldsymbol{\beta}$ вид зависимости $\boldsymbol{D_i(I)}$ получается разным (рис. 3.12). Для товаров и благ повседневного спроса (еда, одежда, оплата коммунальных услуг и т.п.) $\beta < 1$. С ростом дохода потребителей на такие блага тратится все меньшая доля дохода.

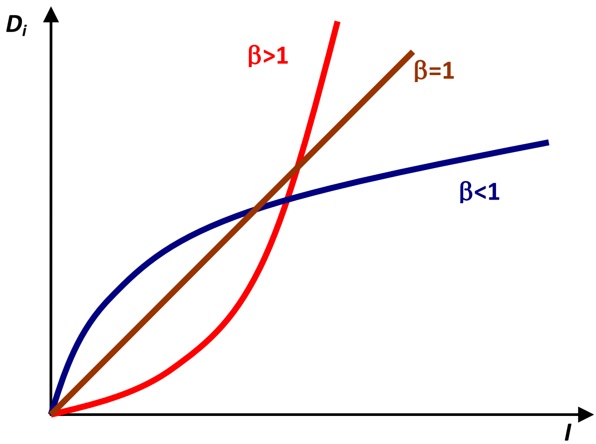

Рис. 3.12. Функции спроса Энгеля

Показатель $\beta \approx 1$ характерен для товаров длительного пользования. Доля затрат на такие товары у потребителей с разным доходом примерно одинакова.

Для предметов роскоши $\beta > 1$. Доля расходов на предметы роскоши близка к нулю у небогатых потребителей и резко возрастает у потребителей с высоким доходом.

2. **Модель Торнквиста**.

В этой модели для трех групп благ вводятся функции спроса различной структуры:

а) Товары и блага первой необходимости. Функция Торнквиста для них имеет вид

$$D_{i1} = \frac{a_1 I}{b_1 + I}. \quad (3.51)$$

При возрастании величины дохода такая функция стремится к постоянному пределу $\boldsymbol{a_1}$. Это выражает тенденцию к постепенному насыщению спроса на блага первой необходимости по мере роста дохода потребителей.

б) Для товаров длительного пользования вводится функция вида

$$D_{i2} = \begin{cases} 0, & (I < I_2); \\ \dfrac{a_2(I - I_2)}{I + b_2}, & (I \geq I_2). \end{cases} \quad (3.52)$$

Можно видеть, что спрос на эти товары возникает только после того, как доход потребителей превысит некоторое пороговое значение $\boldsymbol{I_2}$. С ростом дохода вторая функция Торнквиста также стремится к конечному пределу – $\boldsymbol{a_2}$. Таким образом, спрос на товары длительного пользования тоже имеет тенденцию к насыщению по мере роста дохода потребителей.

в) Третья функция Торнквиста – для предметов роскоши – имеет вид

$$D_{i3} = \begin{cases} 0, & (I < I_3); \\ \dfrac{a_3 I(I - I_3)}{I + b_3}, & (I \geq I_3). \end{cases} \quad (3.53)$$

Таким образом, спрос на предметы роскоши также возникает только после того, как доход потребителей превысит пороговое значение $\boldsymbol{I_3}$ (причем $I_3 > I_2$). Кроме того, спрос на предметы роскоши не имеет тенденции к насыщению при возрастании дохода. Это обстоятельство отражается тем, что третья функция Торнквиста при возрастании величины дохода асимптотически приближается к линейной функции

$$D_{i3} \xrightarrow[I \to \infty]{} a_3 I.$$

Графики функций Торнквиста схематически представлены на рис. 3.13.

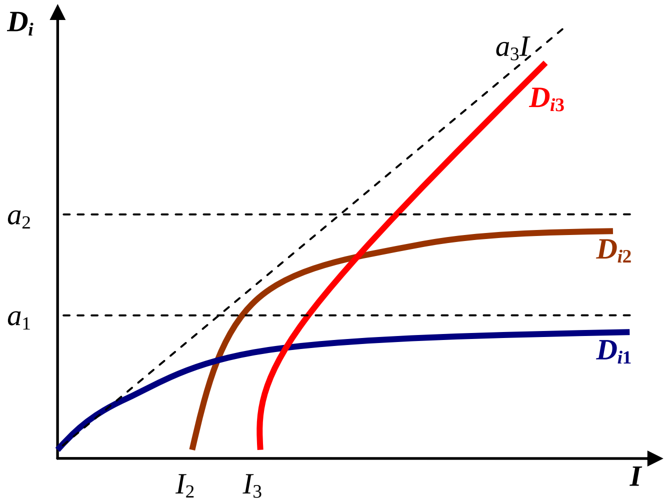

Рис. 3.13. Функции спроса Торнквиста

3.4.6. Компенсация роста цен для одного товара

Если цены на какие-то блага растут, необходимо повышать и доходы населения. Это может делаться путем повышения зарплаты или введения прямых компенсационных выплат определенным группам потребителей.

Рассмотрим случай одного блага, спрос на которое описывается функцией спроса ***D* (*I*, *p*)**. Если цена увеличилась от начальной величины $\boldsymbol{p_0}$ до нового значения $p_1 = p_0 + \Delta p$, то для компенсации потерь населения требуется изменить и доход, сделав его равным $I_1 = I_0 + \Delta I$. При этом спрос на благо не должен измениться. Тогда

$$D(I_1, p_1) - D(I_0, p_0) = \frac{\partial D}{\partial I}\Delta I + \frac{\partial D}{\partial p}\Delta p = 0. \qquad (3.54)$$

Отсюда можно найти требуемую величину изменения дохода

$$\Delta I = -\frac{\partial D / \partial I}{\partial D / \partial p} \Delta p. \qquad (3.55)$$

Т.к. для нормальных ценных товаров

$$\frac{\partial D}{\partial p} < 0, \qquad \frac{\partial D}{\partial I} > 0,$$

то при $\Delta p > 0$ изменение дохода $\boldsymbol{\Delta I}$ получается положительным, так что доходы потребителей необходимо увеличивать.

Если функция спроса имеет степенной вид как по доходу (3.49), так и по цене

$$D(I, p) = aI^{\beta} p^{-\alpha}, \qquad (3.56)$$

то из (3.55) легко получается

$$\Delta I = \frac{\alpha}{\beta} \frac{I}{p} \Delta p, \qquad (3.57)$$

или, с учетом (3.47), (3.50):

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\Delta p}{p} = \frac{\left| E_p(D) \right|}{E_I(D)} \frac{\Delta p}{p}. \qquad (3.58)$$

Таким образом, требуемое для компенсации относительное увеличение дохода должно быть пропорционально относительному увеличению цены с коэффициентом пропорциональности, равным отношению эластичностей спроса по цене и доходу.

3.4.7. Компенсация роста цен для многотоварного потребительского набора

В общем случае рассматривают набор функций спроса вида (3.40)

$$D_i = D_i\left(I, p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_n\right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \qquad (3.59)$$

В общем случае, изменение цены на некий товар (благо) с номером ***i*** влияет на спрос и на все остальные товары. При этом если товар ***i*** является нормальным, то

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_i} < 0$$

– т.е., при увеличении цены на товар спрос на него уменьшается. Что касается перекрестного влияния цены на ***i***-товар на спрос на ***j***-товар, то оно может быть различным. Для взаимодополняющих товаров (например, бензина и моторного масла)

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_i} < 0,$$

для взаимозамещающих товаров (чай – кофе, мясо – рыба, крупы – макароны и т.п.)

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_i} > 0.$$

Если в наборе имеются пары взаимодополняющих товаров, то задача компенсации в общем случае не имеет решения. Если же все товары взаимозаменяемы, то определение уровня компенсации и влияние компенсированного изменения цен на отдельные товары на общую структуру спроса осуществляется на основе решения задачи оптимизации (3.38). Влияния изменений цен на отдельные товары на спрос (как на эти, так и на другие товары в наборе), описывается **уравнением Слуцкого**, вывод и истолкование которого выходят за рамки настоящего пособия.

Ограничимся случаем двух благ. В этом случае анализ может быть произведен графически.

Графическое решение задачи оптимального выбора представлено на рис. 3.14 (см. также рис. 3.11). Оно соответствует кривой безразличия, касательной к которой является прямая бюджетного ограничения, и определяется точкой ***C***, в которой соприкасаются эти линии.

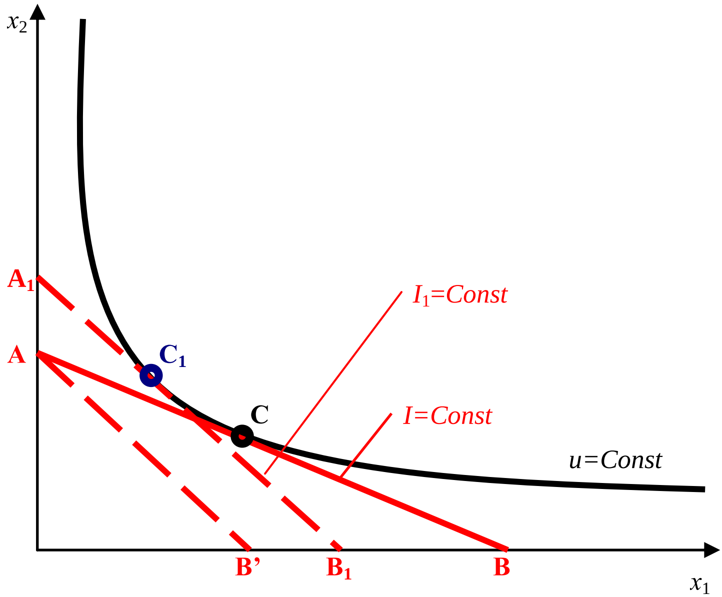

Рис. 3.14. Графический анализ влияния компенсации цен на спрос

Заметим, что из уравнения бюджетной прямой (3.32)

$$I = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

следует, что точки пересечения прямой и осей координат Ox_1 и Ox_2 (точки B и A) определяются значениями координат $x_1 = I / p_1$ и $x_2 = I / p_2$ соответственно.

Пусть теперь цена 1-го товара увеличилась. Тогда координата $\boldsymbol{x_1}$ точки пересечения прямой бюджетного ограничения с осью Ox сместится ближе к началу координат и эта линия переместится в положение *AB'*. В этом положении линия бюджетного ограничения уже не будет касаться заданной кривой безразличия, и оптимальный выбор потребителя будет определяться другой кривой безразличия, проходящей ниже. Это иллюстрирует очевидный вывод о том, что при некомпенсированном росте цен полезность доступного потребителю набора уменьшается.

Для сохранения прежнего уровня полезности доход потребителя необходимо увеличить. На рис. 3.14 это соответствует параллельному сдвигу прямой бюджетного ограничения вверх. Новый оптимальный выбор при сохранении первоначальной полезности будет теперь соответствовать положению бюджетной прямой A_1B_1 и определяться точкой касания этой прямой и заданной кривой безразличия, т.е., точкой C_1. Видно, что эта точка не совпадает с прежней точкой $\boldsymbol{C}$. Ей соответствуют меньшее, чем раньше, значение координаты $\boldsymbol{x_1}$ (спроса на 1-й товар) и большее значение координаты $\boldsymbol{x_2}$ (спроса на 2-й товар). Таким образом, на основе проведенного графического анализа можно сделать важный вывод:

Повышение цены на товар, даже при полной компенсации этого повышения (позволяющей сохранить прежний уровень полезности набора товаров), вызывает уменьшение спроса на этот товар и увеличивает спрос на замещающий товар (товары).

Определим величину увеличения дохода, требуемого для компенсации. Запишем систему уравнений, определяющих решение задачи оптимального спроса (3.38). С учетом (3.39) для случая двух товаров имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} - p_1\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} - p_2\lambda = 0, \\ I = p_1x_1 + p_2x_2. \end{cases} \tag{3.60}$$

Отсюда полные дифференциалы полезности $\boldsymbol{u}$ и дохода $\boldsymbol{I}$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 = \lambda\left(p_1dx_1 + p_2dx_2\right), \tag{3.61}$$

$$dI = d\left(p_1x_1 + p_2x_2\right) = p_1dx_1 + p_2dx_2 + x_1dp_1 + x_2dp_2. \tag{3.62}$$

Т.к. в рассматриваемой задаче полезность и не должна измениться, ее дифференциал равен нулю. С учетом того, что полезность денег λ не является нулевой величиной, получаем из (3.61)

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 = 0.$$

Тогда в выражении (3.62) получим

$$dI = x_1 dp_1 + x_2 dp_2. \qquad (3.63)$$

Если меняется только цена на 1-й товар (dp_2 = 0), то величина компенсации: $dI = x_1 \cdot dp_1$. Значит, при изменении цены 1-го товара на Δp_1 компенсирующая прибавка дохода должна быть равна

$$\Delta I = x_1 \Delta p_1. \qquad (3.64)$$

Полученная формула носит приближенный характер, т.к. уравнение (3.63) справедливо только при бесконечно малых изменениях цен, а в реальности изменение цены на товар всегда является конечной величиной.

Пример 3.7. Допустим, что в предыдущей задаче (пример 3.6) цена на первый товар изменилась и стала равной 3 единицам. Определить необходимую величину компенсационной прибавки к доходу потребителя и объемы спроса на товары, соответствующие оптимальному выбору потребителя в новых условиях.

Решение

Поскольку компенсация предполагает, что уровень полезности набора остается неизменным, функция полезности описывается той же формулой, что и в предыдущей задаче и имеет ранее найденное значение 2. Однако величина дохода потребителя теперь неизвестна. Обозначим ее $\boldsymbol{I'}$. Теперь бюджетное ограничение запишется так:

$$I' = 3x_1 + 2x_2.$$

Снова выразим $\boldsymbol{x_1}$ из выражений функции полезности и бюджетного ограничения и приравняем эти два выражения. Получается квадратное уравнение

$$3x_1^2 - I'x_1 + 2u^2 = 0$$

с решением

$$x_{1_{1,2}} = \frac{I' \pm \sqrt{D}}{6} = \frac{I' \pm \sqrt{I'^2 - 24u^2}}{6}.$$

Оптимальный выбор соответствует случаю $D = 0$. Тогда

$$I' = \sqrt{24u^2}.$$

Величина функции полезности не изменилась по сравнению с предыдущей задачей и по-прежнему равна 2. Тогда

$$I' = \sqrt{24 \cdot 2^2} = \sqrt{96} = 9{,}8.$$

Величина компенсационной прибавки будет равна ΔI = 9,8 – 8 = 1,8. Заметим, что формула (3.64) дает в данном случае величину прибавки в 2 единицы, так что эта формула действительно является приближенной. Спрос на первый товар, как и в предыдущей задаче, определяется единственным корнем квадратного уравнения

$$x_1 = \frac{I'}{6} = \frac{9{,}8}{6} = 1{,}63.$$

Спрос на второй товар находим из выражения функции полезности

$$x_2 = \frac{u^2}{x_1} = \frac{2^2}{1{,}63} = 2{,}45.$$

Видно, что спрос на первый товар уменьшился, а на второй – увеличился, что подтверждает вывод, полученный ранее на основе графического анализа.

Пример 3.8. Решение задачи об оптимальном спросе потребителя с помощью электронных таблиц EXCEL.

Рассмотрим потребительский набор, который включает два товара и описывается неоклассической функцией полезности

$$u = x_1^{a_1} x_2^{a_2}.$$

Цены на товары равны соответственно $\boldsymbol{p_1}$ и $\boldsymbol{p_2}$, а доход потребителя – $\boldsymbol{I}$. Эти величины заданы.

Определить с помощью электронных таблиц EXCEL максимальный уровень полезности и значения спроса на блага, соответствующие оптимальному выбору потребителя.

Решение

В соответствии с общей постановкой задачи об оптимальном выборе потребителя, необходимо решить условную задачу оптимизации:

$$\begin{cases} u = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \to \max, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I. \end{cases}$$

Для решения с помощью EXCEL составляем таблицу, показанную на рис. 3.15 (строки 1-10).

В ячейки, выделенные серой заливкой, заносятся значения параметров, заданных в условиях задачи – значения цен на блага, показатели степени для выражения функции полезности и величина дохода потребителя. В данном случае использованы значения параметров из примера 3.6.

В ячейках A10 и B10 вычисляются искомые параметры решения - величины спроса на блага 1 и 2. При составлении таблицы в них можно занести произвольные значения.

В ячейке C6 вычисляется искомое значение функции полезности, которая является целевой функцией поставленной задачи оптимизации. Для этого в ячейку заносится формула

=A10^B5*B10^C5.

Таким образом, искомые параметры решения задачи сосредоточены в ячейках A10, B10, C6. Эти ячейки выделены на рис. 3.15 жирными рамками, а значения в них даны крупным жирным шрифтом.

В ячейке D3 (она обведена тонкой рамкой) рассчитывается величина затрат потребителя на приобретение набора благ. Для этого использована функция

= СУММПРОИЗВ(B1:C1;A10:B10).

Знак в ячейке E3 поставлен для наглядности. Он напоминает, что затраты потребителя не могут превышать его дохода.

	A	B	C	D	E	F
1	Параметры условий					
2		Благо 1	Благо 2	Затраты:		Доход *I*
3	*Цены* p_1, p_2:	2	2	8	<=	8
4						
5	a_1, a_1 =	0,5	0,5			
6	Функция полезности:		**2**			
7						
8	Спрос					
9	x_1=	x_2=				
10	**2**	**2**				
11						
12						
13			Расчет компенсации:			
14		Благо 1	Благо 2	Затраты:		Компенсация
15	*Цены* p_1, p_2:	3	2	**9,80**		1,80
16						
17	a_1, a_1 =	0,5	0,5			
18	Функция полезности:		2			
19						
20	Спрос					
21	x_1=	x_2=				
22	**1,63**	**2,45**				

Рис. 3.15. Решение задач расчета спроса в EXCEL

После подготовки таблицы в меню ***Сервис*** выбирается команда ***Поиск решения***. Появившееся диалоговое окно заполняется так, как показано на рис. 3.16.

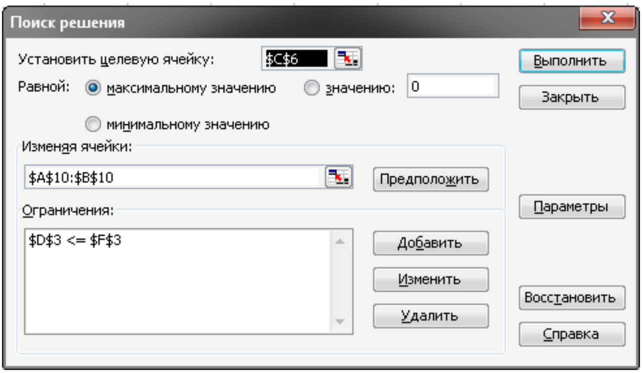

Рис. 3.16. Параметры поиска решения для расчета оптимального спроса

Заметим, что при решении задачи с помощью EXCEL бюджетное ограничение может иметь как вид равенства (3.36), так и более общий вид неравенства (3.35). Решение получится одинаковым.

После заполнения элементов диалогового окна, необходимо нажать клавишу ***Параметры*** и в появившемся окне диалога ***Параметры поиска решения*** установить флажок ***Неотрицательные значения***; затем нажать ***ОК*** для возврата в окно диалога. Затем щелчком по клавише ***Выполнить*** дается команда компьютеру на поиск решения задачи. Результат поиска показан на рисунке 3.15.

Пример 3.9. Решение задачи о компенсации повышения цен с помощью электронных таблиц EXCEL.

Допустим, что потребительский набор включает два блага и описывается неоклассической функцией полезности

$$u = x_1^{a_1} x_2^{a_2}.$$

При ценах на блага соответственно $\boldsymbol{p_1}$ и $\boldsymbol{p_2}$, и доходе потребителя $\boldsymbol{I_0}$ определен максимальный уровень полезности $\boldsymbol{u_0}$ и соответствующие ему значения спроса на блага. Эти величины заданы.

В случае, когда цена на благо 1 возросла и стала равной $\boldsymbol{p'_1}$, определить с помощью электронных таблиц EXCEL новые уровни спроса $\boldsymbol{x'_1}$ и $\boldsymbol{x'_2}$, соответствующие оптимальному выбору потребителя при условии сохранения прежнего значения функции полезности, а также необходимую для сохранения полезности величину компенсации дохода.

Решение

В данной задаче целевой функцией становится новая величина дохода потребителя. Для того чтобы на компенсацию роста цены не расходовались лишние средства, отыскивается минимально необходимое значение компенсированного дохода $\boldsymbol{I'}$ при условии сохранения прежнего значения функции полезности. Получаем условную задачу оптимизации следующего вида:

$$\begin{cases} p_1' x_1' + p_2 x_2' = I' \to \min, \\ (x_1')^{a_1} (x_2')^{a_2} = u_0. \end{cases}$$

Результаты решения задачи с помощью электронных таблиц EXCEL при параметрах примера 3.7 показаны на рисунке 3.15 (строки 13-22). Функции для расчета значений затрат потребителя и функции полезности имеют ту же структуру, что и в предыдущем примере:

- затраты (ячейка D15):

СУММПРОИЗВ(B15:C15;A22:B22);

- функция полезности (ячейка C18):

=A22^B17*B22^C17.

Параметры заполнения диалогового окна ***Поиск решения*** для этого случая читателю предлагается разработать самостоятельно по аналогии с предыдущим примером. Обратите внимание на изменение параметров оформления ячеек в таблице, показывающих роль содержимого ячеек в решении задачи (исходные данные выделены серой заливкой, искомые значения спроса и целевой функции затрат (дохода потребителя) – крупным жирным шрифтом и жирными рамками, вспомогательная функция для создания ограничения – функция полезности – тонкой рамкой).

В качестве ограничивающего функцию полезности значения можно взять как непосредственно числовое значение решения предыдущего примера – 2 – так и сослаться для этого на ячейку C6, содержащую это значение. Таким образом, ограничение при поиске решения может иметь вид

C18 = 2 или **C18 = C6**.

Второй вариант удобен, если приходится одновременно решать как первичную задачу расчета оптимального спроса, так и задачу расчета компенсации роста цен относительно первоначального уровня.

Величина компенсационной прибавки к доходу рассчитывается в ячейке F15 по формуле

= D15 – D3.